CAPÍTULO 12

FRACCIONES FACTORIALES

12.1 INTRODUCCIÓN

Cuando el número de factores que intervienen en un experimento no es pequeño, los diseños factoriales equilibrados exigen una gran cantidad de pruebas. Así un diseño de este tipo para el estudio de 8 factores a 2 niveles necesitaría $2^8 = 256$ pruebas, y uno para la investigación de 13 factores a 3 niveles exigiría más de millón y medio de pruebas.

En estas situaciones presenta un gran interés la utilización de diseños que, manteniendo la propiedad esencial de la ortogonalidad de los efectos a estudiar, no impliquen la necesidad de probar todos los tratamientos posibles. Este tipo de diseños se denominan tradicionalmente **fracciones factoriales**, y su estudio constituye el objeto del presente capítulo.

En los últimos años la utilización de fracciones factoriales en la industria ha experimentado una enorme expansión, al constituir uno de los elementos claves de las modernas técnicas japonesas de Ingeniería de la Calidad desarrolladas por el profesor Taguchi. En dicho contexto es frecuente referirse a estos diseños bajo la denominación de "orthogonal arrays", que también utilizamos en el capítulo.

El tipo más simple de fracción factorial lo constituyen los denominados diseños 2^{K-1}, en los que se estudian K factores a dos niveles realizando sólo la mitad de las pruebas que serían necesarias en un plan factorial equilibrado 2^K. Estos diseños se estudian en el apartado 12.3, analizándose sobre este caso sencillo los problemas de confusión de efectos asociados al empleo de este tipo de diseños.

Las fracciones factoriales más conocidas y utilizadas son aquéllas en las que todos los factores están a dos niveles y el número total de pruebas es una potencia de 2. Este tipo de diseños, denominados Planes 2^{K-P}, se desarrolla en los apartados 12.4 y 12.5, tanto en el aspecto de la construcción del diseño como en el del análisis estadístico de sus resultados. Este último no plantea especiales dificultades, dado que tanto la técnica del Anova como la del Gráfico de Daniel pueden aplicarse prácticamente sin modificaciones.

Las fracciones factoriales con factores a tres niveles han sido popularizadas recientemente por los trabajos de Taguchi y son objeto de estudio en el apartado 12.6.
En todos los casos se han ilustrado las técnicas expuestas con el análisis de diversos ejemplos reales.

Los trabajos prácticos que se proponen se centran en el doble aspecto de la construcción de diseños adecuados y del análisis estadístico de sus resultados.

12.2 IDEAS GENERALES

12.2.1 Interés práctico de las Fracciones Factoriales

Autoevaluación: En un estudio para optimizar el proceso de activación del catalizador de cromo utilizado en la fabricación de polietileno, con el fin de mejorar su productividad, se determinaron 11 factores potencialmente importantes (la mayor parte de ellos asociados al perfil de temperaturas a utilizar). Trabajando con dichos factores a dos niveles) cuántas activaciones serían necesarios en un diseño equilibrado 2^K? Si cada activación tarda 10 horas,)cuánto tiempo exigiría la realización de un diseño de este tipo?

En un contexto industrial es frecuente que el número de factores a investigar sea elevado. En estas situaciones los planes factoriales equilibrados pueden exigir un número excesivo de pruebas que los hagan irrealizables en la práctica. En estas situaciones presenta un gran interés el recurso a otros tipos de diseños, denominados **fracciones factoriales**, que permiten estudiar los efectos de interés con un número de pruebas mucho más reducido.

Así, en el ejemplo mencionado en la Autoevaluación bastaría realizar (sólo **16** pruebas**!** (adecuadamente escogidas entre las 2048 posibles) para estimar los efectos simples de los 11 factores.

Cuando el número de factores no es reducido, los planes equilibrados permiten estudiar un número muy elevado de efectos (interacciones de cualquier orden) la mayor parte de los cuales tienen poco interés potencial, proporcionando en la estimación de los efectos una precisión innecesariamente elevada, a cambio de exigir un número muy elevado de pruebas.

<u>Ejemplo</u>: en un plan 2^6 para el estudio de 6 factores, las 64 observaciones permiten estimar:

	6	Efectos simples	
	15	Interacciones dobles	
	20	Interacciones triples	
	15	"	cuádruples
	6	"	quíntuples
	1	"	séxtuple

Total Efectos	63	(igual a número total de grados de libertad)	

Cada efecto se estimará con una gran precisión, como la diferencia entre dos medias de 32 pruebas cada una.

Sin embargo, la mayor parte de estos efectos serán inexistentes (por ejemplo muy posiblemente todas las interacciones de orden mayor que 2, y la mayor parte de las interacciones dobles). Además la precisión puede ser innecesariamente elevada para un primer estudio exploratorio.

)No sería posible reducir el tamaño de la experiencia, sacrificando algo de precisión y la posibilidad de estudiar interacciones de orden elevado? Éste es precisamente el objetivo de las fracciones factoriales

Veamos sobre un ejemplo sencillo algunas ideas intuitivas

12.2.2 ¿Cómo estudiar 4 factores a 2 niveles en sólo 8 pruebas?

Para estudiar 4 factores a dos niveles, en principio el Plan Factorial 2^4 completo exigiría las 16 pruebas siguientes:

Prueba	A	B	C	D
1	-	-	-	-
2	+	-	-	-
3	-	+	-	-
4	+	+	-	-
5	-	-	+	-
6	+	-	+	-
7	-	+	+	-
8	+	+	+	-
9	-	-	-	+
10	+	-	-	+
11	-	+	-	+
12	+	+	-	+
13	-	-	+	+
14	+	-	+	+
15	-	+	+	+
16	+	+	+	+

Supongamos que sólo es posible realizar 8 de estas 16 pruebas. ¿Cuáles deberíamos escoger?

Autoevaluación: Supongamos que se desea realizar sólo 8 pruebas.)Es una buena solución realizar sólo las 8 primeras pruebas?)Por qué?

Parece lógico que, con el fin de poder estudiar los efectos de los cuatro factores con la misma precisión, las 8 pruebas se seleccionen de forma que cada factor se estudie 4 veces a nivel - y 4 veces a nivel +. Vamos a ver, sin embargo, que satisfacer esta condición no es suficiente para obtener un buen diseño experimental.

Autoevaluación: De la tabla de la página anterior se decide realizar sólo las pruebas 1, 4, 5, 8, 9, 12, 13 y 16.

Prueba	A	B	C	D
1	-	-	-	-
2	+	-	-	-
3	-	+	-	-
4	+	+	-	-
5	-	-	+	-
6	+	-	+	-
7	-	+	+	-
8	+	+	+	-
9	-	-	-	+
10	+	-	-	+
11	-	+	-	+
12	+	+	-	+
13	-	-	+	+
14	+	-	+	+
15	-	+	+	+
16	+	+	+	+

)Se ha probado cada factor 4 veces a nivel - y 4 veces a nivel +?
)Cómo se estudiaría a partir de estas pruebas el efecto del Factor A?)Y el del Factor B?
)Qué problema aparece?

Es esencial que las pruebas se seleccionen de forma que los **efectos** de los diferentes factores sigan siendo **ortogonales**, y puedan por tanto estudiarse correctamente sin que se confundan entre sí.

Analicemos ahora otra posible solución, consistente en realizar sólo las pruebas 1, 4, 6, 7, 10, 11, 13 y 16.

Prueba	A	B	C	D
1	-	-	-	-
2	+	-	-	-
3	-	+	-	-
4	+	+	-	-
5	-	-	+	-
6	+	-	+	-
7	-	+	+	-
8	+	+	+	-
9	-	-	-	+
10	+	-	-	+
11	-	+	-	+
12	+	+	-	+
13	-	-	+	+
14	+	-	+	+
15	-	+	+	+
16	+	+	+	+

Como puede comprobarse en la tabla con esta solución también cada factor se estudia 4 veces a nivel - y 4 veces a nivel +. Sin embargo las propiedades estadísticas del diseño son en este caso mucho mejores.

En efecto, a continuación se indican los signos (+ o -) con los que aparece cada una de las 8 pruebas seleccionadas en la estimación de los 4 efectos simples y de la interacción doble AxB

	Prueba							
Efecto	**1**	**4**	**6**	**7**	**10**	**11**	**13**	**16**
A	-	+	+	-	+	-	-	+
B	-	+	-	+	-	+	-	+
C	-	-	+	+	-	-	+	+
D	-	-	-	-	+	+	+	+
AxB	+	+	-	-	-	-	+	+

Puede comprobarse que los 5 efectos recogidos en la tabla siguen siendo ortogonales entre sí (en las 4 pruebas en que un determinado efecto tiene signo +, los restantes efectos tienen 2 - y 2 +, y lo mismo sucede en las 4 pruebas en las que el efecto considerado tiene signo -)

Autoevaluación: comprobar que los 4 efectos simples son también ortogonales a las otras cinco interacciones dobles AxC, AxD, BxC, BxD y CxD

Autoevaluación: ¿son las interacciones dobles AxB y CxD ortogonales entre sí? ¿El efecto A es ortogonal a la interacción triple BxCxD?

Puede comprobarse, sin embargo, que las interacciones dobles AxB y CxD tienen el mismo signo en las 8 pruebas seleccionadas, por lo que se confundirán entre sí al intentar estimarlas a partir de los resultados de este diseño. Lo mismo sucede con las parejas de interacciones dobles AxC y BXD por una parte y AxD y BxC por otra.

*Autoevaluación: ⁾Podría estudiarse mediante el diseño propuesto una hipotética interacción cuádruple A*B*C*D?*
⁾Cómo crees que se ha seleccionado el subconjunto de 8 pruebas que constituyen el diseño propuesto?

En general el efecto que no puede estudiarse en una fracción factorial, porque su signo es el mismo en todas las pruebas que la constituyen, se denomina el **generador** de la fracción. El número de letras del generador se denomina **Resolución** de la fracción, y acostumbra a expresarse en números romanos. El diseño propuesto es, por tanto, una fracción factorial de Resolución IV cuyo generador es la interacción cuádruple A*B*C*D.

12.2.3 Resumen de las ideas generales

Como síntesis de las ideas expuestas, podemos decir que las Fracciones Factoriales son diseños que permiten estudiar el efecto de un número elevado de factores con menor número de pruebas que las que exigiría un Plan Factorial equilibrado completo (la reducción en el número de pruebas puede ser en muchos casos sustancial)

a cambio de...

- No poder estudiar ciertos efectos (generalmente interacciones de orden elevado) que constituyen los generadores de la fracción

- "Confundir" entre sí algunos efectos de los que pueden estudiarse (por ejemplo el efecto simple A con la interacción triple BCD, o la interacción doble AB con la CD).

Una "buena" Fracción Factorial

a) No debe confundir nunca efectos simples entre sí

b) Debe procurar no confundir efectos simples con interacciones dobles (dado que no es raro que éstas existan, y su confusión con un efecto simple podría engañar sobre la existencia o naturaleza de éste)

c) Si es posible, es deseable que no se confundan tampoco interacciones dobles entre sí, para así poder estudiar la existencia de estas interacciones

Autoevaluación:)Cuáles de los tres objetivos anteriores se consiguen en el diseño estudiado en el apartado 12.2.2?

Hasta qué punto es posible conseguir los objetivos mencionados, está condicionado por el grado de fraccionamiento de la fracción. Así, por ejemplo, 5 factores pueden estudiarse en 16 pruebas cumpliéndose a), b) y c), pero si se desean estudiar en sólo 8 pruebas únicamente es posible satisfacer el requisito a).

12.3 DISEÑOS 2^{K-1}

12.3.1 Construcción de fracciones 2^{K-1}

Las fracciones factoriales más sencillas, son las que permiten estudiar k factores a 2 niveles haciendo sólo la mitad de las pruebas (o sea 2^{k-1} pruebas) de las que serían precisas en el diseño equilibrado completo. Estas diseños se denominan en general Planes 2^{k-1} (así, el ejemplo visto en el apartado anterior para estudiar 4 factores en 8 pruebas sería un Plan 2^{4-1})

En principio en un diseño 2^{k-1} se utiliza como generador la interacción más elevada posible (la de orden K), puesto que de esta forma el efecto que no puede estudiarse es el potencialmente menos importante.

Para construir una Fracción 2^{k-1} pueden, por tanto, utilizarse dos procedimientos completamente equivalentes:

- Construir el plan 2^k completo y seleccionar sólo las pruebas que corresponden al signo + (o al -) en la interacción de orden más elevado ó

- Construir el Plan $2^{(k-1)}$ completo (con K-1 de los factores) y asignar el factor restante a la interacción de orden más elevado entre los K-1 primeros

Los dos sistemas son idénticos (aunque las pruebas aparezcan en distinto orden), puesto que si en todas las pruebas el signo del último factor es igual al producto de los K-1 restantes, el producto de los K signos (o sea el de la interacción de orden K) será siempre positivo.

<u>Ejemplo</u>: 4 Factores en 8 pruebas (Fracción: 2^{4-1})

Prueba	A	B	C	D=AxBxC	Signo de AxBxCxD	Orden en el plan 2^4
1	-	-	-	-	+	1
2	+	-	-	+	+	10
3	-	+	-	+	+	11
4	+	+	-	-	+	4
5	-	-	+	+	+	13
6	+	-	+	-	+	6
7	-	+	+	-	+	7
8	+	+	+	+	+	16

12.3.2 Confusión de efectos en fracciones 2^{K-1}

Dos efectos estarán completamente confundidos si sus signos (- ó +) coinciden en todas las pruebas de la fracción. Si esto sucede lo que se estimará a partir de los datos será la suma de los dos efectos.

*Autoevaluación:)Qué consecuencias desfavorables pueden derivarse en la práctica del hecho de que dos efectos, por ejemplo el efecto simple A y la interacción B*C, estén confundidos en un diseño?*
*)Qué pasaría si poblacionalmente A no tuviera efecto pero sí que existiera la interacción B*C?*
)Qué pasaría si ambos factores fueran importantes poblacionalmente pero aproximadamente del mismo orden y de signos opuestos?

<u>Nota</u>: dos efectos también estarán confundidos si sus signos son opuestos en todas las pruebas de la fracción. En este caso lo que se estimará a partir de los datos será la diferencia entre ambos efectos.

La obtención de la estructura de confusión de efectos en las fracciones 2^{k-1} es extremadamente sencilla.

Autoevaluación: si el producto de K términos (- ó +) es positivo, constatar que el signo del producto de cualquier subconjunto de L de ellos es idéntico al signo del producto de los K-L restantes.

Como consecuencia del resultado anterior, en toda fracción 2^{K-1}

- El efecto simple de cualquier factor está confundido con la interacción de orden K-1 entre los restantes factores

- La interacción doble entre dos factores está confundida con la interacción de orden K-2 entre los restantes factores

Autoevaluación: Se desea investigar el efecto de 5 factores, todos ellos a dos niveles.) Estaría justificado plantear de salida un diseño 2^5, o parece más razonable realizar, al menos inicialmente, sólo las 16 pruebas de la fracción 2^{5-1}?)Cómo estarían confundidos los efectos en esta fracción?

12.3.3 Ejemplo de una fracción 2^{4-1}

Se desea estudiar el efecto de 4 factores (A, B, C y D) en la resistencia a la corrosión de cierto tipo de hojalata (medida por el número de días que resiste sin corroerse en un ambiente de niebla salina) Por consideraciones técnicas se sabe que el factor A es el único que puede interaccionar con los otros factores. Se ha realizado un experimento cuyo diseño y resultados se recogen en la tabla siguiente:

A	B	C	D	Resultado
-	-	-	-	34.5
+	-	-	+	23.6
-	+	-	+	20.7
+	+	-	-	24.8
-	-	+	+	21.0
+	-	+	-	23.1
-	+	+	-	35.2
+	+	+	+	23.5

El diseño utilizado ha sido, evidentemente la fracción 2^{4-1}_{IV} de generador ABCD

La estimación de los efectos se lleva a cabo de la misma forma que la vista en el capítulo anterior para los diseños 2^K

$$A = \frac{23.6+24.8+23.1+23.5}{4} - \frac{34.5+20.7+21.0+35.2}{4} = -4.1 \quad \text{(confundido con BCD)}$$

$$B = \frac{20.7+24.8+35.2+23.5}{4} - \frac{34.5+23.6+21.0+23.1}{4} = +0.5 \quad \text{(confundido con ACD)}$$

$$C = \frac{21.0+23.1+35.2+23.5}{4} - \frac{34.5+23.6+20.7+24.8}{4} = -0.2 \quad \text{(confundido con ABD)}$$

$$D = \frac{23.6+20.7+21.0+23.5}{4} - \frac{34.5+24.8+23.1+35.2}{4} = -7.2 \text{ (confundido con ABC)}$$

La estimación de las interacciones dobles, que están confundidas 2 a 2, se realiza también de forma análoga:

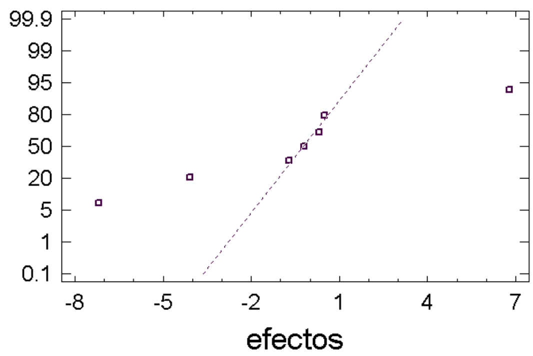
$$AB = \frac{\text{suma pruebas con AB +}}{4} - \frac{\text{suma pruebas con AB -}}{4} = +0.3 \text{ (confundida con CD*)}$$

$$AC = \frac{\text{suma pruebas con AC +}}{4} - \frac{\text{suma pruebas con AC -}}{4} = -0.7 \text{ (confundida con BD*)}$$

$$AD = \frac{\text{suma pruebas con AD +}}{4} - \frac{\text{suma pruebas con AD -}}{4} = +6.8 \text{ (confundida con BC*)}$$

(* por motivos técnicos está interacción se sabe que no puede existir)

Elgráfico de Daniel de los efectos estimados es:



que pone de manifiesto que sólo los efectos A (-4.1), D (-7.2) y AD (+6.8) son significtivos.

El resto del análisis se lleva a cabo como en los planes 2^K.

La condición operativa óptma es en este caso A-B-, y la media prevista en dicha condición es (por ser 25.8 la media del experimento):

$$\text{media prevista} = 25.8 + \frac{1}{2}(-(-4.1) - (-7.2) + 6.8) = 34.85 \text{ días}$$

Autoevaluación: Reanalizar el experimento expuesto en el apartado 11.3.5 suponiendo que sólo se hubieran realizado las 16 pruebas correspondientes a la fracción factorial 2^{5-1}_{IV} *de generador ABCDE (en vez de las 32 pruebas del experimento* 2^5 *que realmente se realizó). Constatar que las conclusiones obtenidas son prácticamente idénticas a las halladas al analizar el diseño completo, y que, por tanto, se hubiera podido obtener la misma información, en la mitad de tiempo y con la mitad de coste, utilizando como diseño dicha fracción factorial*

12.4 DISEÑOS 2^{K-P}

12.4.1 Construcción de diseños 2^{K-P}

Las fracciones 2^{k-1} exigen realizar la mitad de pruebas de las que exigiría el plan completo. Para valores elevados de K este nivel de reducción puede ser insuficiente, y se precisarán diseños en los que el número de pruebas sea inferior (por ejemplo, analizar los efectos de 8 factores realizando sólo 16 pruebas, que serían la dieciseisava parte del diseño completo).

En general se denominan 2^{K-P} a las fracciones que permiten estudiar K factores realizando 2^{K-P} pruebas.

Autoevaluación:)Cómo se denominará la fracción que permite estudiar 7 factores en 8 pruebas?)Y la que permite estudiar 8 factores en 32 pruebas?

Por tanto, las fracciones 2^{K-2} exigen la cuarta parte de pruebas que el diseño completo, las 2^{K-3} la octava parte, etcétera...

En general una fracción 2^{K-P} se construye a partir de **P generadores**, seleccionando del plan completo aquéllas pruebas en las que dicho generadores tienen un signo determinado (por ejemplo, todos ellos signo +). La selección de los generadores debe realizarse evitando que se confundan entre sí efectos potencialmente importantes.

Autoevaluación: Se desea construir una fracción para estudiar 5 factores en 8 pruebas.) Sería una buena solución utilizar como generadores las interacciones ABCDE y ABCD? (Escribir las pruebas resultantes y comprobar lo que pasa con el efecto E)

Regla importante : si dos efectos son generadores (es decir tienen signo constante en todas las pruebas de la fracción) el efecto resultante de multiplicar las letras de ambos y tachar los cuadrados también es un generador

Como regla general la selección de los efectos debe realizarse intentando que el orden de los mismos (o sea el número de letras que es 1 para los efectos simples, 2 para las interacciones dobles,...) sea lo más elevado posible, teniendo en cuenta también el orden de los efectos inducidos indirectamente y que resultan como "producto" de los considerados.

La forma práctica de proceder para construir una fracción 2^{K-P} es la siguiente :

- Se construye el Plan Factorial completo con los K-P primeros factores

- Se asignan los P factores restantes a columnas correspondientes a interacciones entre los primeros factores. Estas interacciones se seleccionan intentando que los órdenes de los generadores resultantes sean lo más elevados posibles.

En la siguiente tabla se recogen algunas asignaciones aconsejables para diseños de 8 y 16 pruebas, con un número de factores comprendido entre 4 y 8

Número de Factores	8 PRUEBAS	16 PRUEBAS
4	D = ABC	2^4 completo
5	D = AB E = AC	E = ABCD
6	D = AB E = AC F = BC	E = ABC F = BCD
7	D = AB E = AC F = BC G = ABC	E = ABC F = BCD G = ACD
8	Imposible	E = ABC F = BCD G = ACD H = ABD

Nota: es posible también construir fracciones factoriales 2^{K-P} utilizando en Statgraphics la opción S*pecial ... Experimental Design ... Create Design* y marcando la opción *Screening*

12.4.2 Confusión de efectos en diseños 2^{K-P}

Supongamos que se desea construir una Fracción para estudiar el efecto de 6 Factores (A, B, C, D, E y F) en 16 pruebas (Fracción 2^{6-2})

1. Se construye un Plan Factorial completo con los 4 Factores A, B, C, D

2. Se asigna el Factor E a la interacción ABC

3. Se asigna el Factor F a la interacción BCD

Por haberse asignado E=ABC $\Rightarrow$ ABCE es un "generador"

Por haberse asignado F=BCD $\Rightarrow$ BCDF es un "generador"

El "producto" de generadores (tachando los cuadrados) es otro generador:

ABCD*BCDF = ABCDEF $\Rightarrow$ ADEF es también un generador

El diseño es de Resolución IV (número de términos del generador más corto es 4)

Los "alias" de cualquier efecto (o sea los efectos con los que está confundido) se hallan obteniendo su producto con los diferentes generadores y tachando los cuadrados

<u>Alias del Efecto simple A</u>:

$$A{*}ABCE \Rightarrow \cancel{A}^2BCE \Rightarrow BCE$$
$$A{*}BCDF \Rightarrow ABCDF$$
$$A{*}ADEF \Rightarrow \cancel{A}^2DEF \Rightarrow DEF$$

A estará "confundido" con las interacciones BCD, DEF y ABCDF

<u>Alias de la interacción AB</u>:

$$AB{*}ABCE \Rightarrow A^2B^2CE \Rightarrow CE$$
$$AB{*}BCDF \Rightarrow AB^2CDF \Rightarrow ACDF$$
$$AB{*}ADEF \Rightarrow A^2BDEF \Rightarrow BDEF$$

AB está "confundida" con otra interacción doble (CE) y con dos interacciones de orden superior ACDF y BDEF.

12.4.3 Un ejemplo de una fracción 2^{8-4}

En una planta de fabricación por inyección de piezas de plástico se realizó un experimento para reducir el número de rugosidades ("mark flows") que aparecían en las piezas. Cada prueba consistió en fabricar 100 piezas y obtener el número medio de rugosidades (contadas de una forma normalizada) que aparecían.

Se decidió estudiar los 8 factores siguientes, todos ellos a dos niveles, uno bajo (-) y otro alto (+):

A: Recorrido de inyección
B: Temperatura del molde
C: Temperatura del fundido
D: Apertura de la boquilla
E: 1ª Velocidad de inyección
F: 2ª Velocidad de inyección
G: Punto de cambio (inyec/manten)
H: Fuerza de cierre del molde

El diseño experimental utilizado fue la fracción factorial 2^{8-4} de Resolución IV, que resulta de aplicar lo aconsejado en la tabla final de 12.4.1. Dicho diseño tienen los 4 generadores iniciales definidos en dicha tabla, y 11 generadores adicionales indirectos, resultantes de productos entre los iniciales. Cada efecto está, en consecuencia, confundido con otros11. Puede constatarse que el diseño es de resolución IV, por que los efectos simples no resultan confundidos con interacciones dobles y pueden estimarse bien. Las interacciones dobles, por el contrario, están confundidas entre sí en grupos, por lo que no va a ser posible estimar sus efectos individuales.

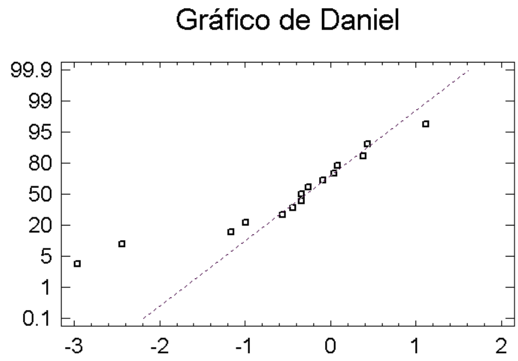
Las pruebas realizadas y los resultados obtenidos se recogen en la tabla siguiente:

A	B	C	D	E	F	G	H	Rugos.
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	6.2
1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	5.2
-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	4.3
1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	3
-1	-1	1	-1	1	1	1	-1	5.3
1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	4
-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	0
1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	1.9
-1	-1	-1	1	1	1	-1	1	6.3
1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	5.8
-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	6
1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	3
-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	3.3
1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	5.8
-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	0
1	1	1	1	1	1	1	1	0

El cálculo de los efectos, que se realiza de la forma habitual, da los siguientes resultados, en los que sólo se han reflejado los efectos de orden menor o igual que 2.

```
average     = 3.75625
A:Factor_A  = -0.3375
B:Factor_B  = -2.9625
C:Factor_C  = -2.4375
D:Factor_D  = 0.0375
E:Factor_E  = -0.3375
F:Factor_F  = 0.3875
G:Factor_G  = 0.4375
H:Factor_H  = -0.9875
AB+CG+DH+EF = -0.2625
AC+BG+DF+EH = 1.1125
AD+BH+CF+EG = 0.0875
AE+BF+CH+DG = -0.4375
AF+BE+CD+GH = -0.5625
AG+BC+DE+FH = -1.1625
AH+BD+CE+FG = -0.0875
```

Representando estos efectos en papel probabilístico normal, se constata que B y C (temperaturas del molde y del fundido) son claramente significativos, resultando dudosos H (fuerza de cierre del molde) y dos grupos de interacciones dobles



Considerando sólo los efectos simples de B, C y H, la condición operativa óptima para reducir las rugosidades es B+C+H+ (temperaturas de molde y de fundido altas y fuerza de cierre del molde alta), por ser los tres efectos negativos.

El número medio de rugosidades previsto en estas comdiciones es:

$$\text{media prevista} = 3.76 + \frac{1}{2}((-2.96) + (-2.44) + (-0.999) = 0.56$$

que es sólo la décima del que existía en el proceso habitual.

12.5 "ORTHOGONAL ARRAYS" L8 Y L16

En los últimos años han alcanzado una gran popularidad en la industria occidental los enfoques del Diseño de Experimentos desarrollados en Japón por el profesor Genichi Taguchi.

Para la implementación de sus ideas de Diseño Robusto, una filosofía de calidad orientada hacia la consecución de productos y procesos que sean poco sensibles a la presencia de causas de variabilidad, Taguchi propone la utilización generalizada del Diseño de Experimentos en las fases de diseño de productos y de procesos.

Con el fin de conseguir que esta técnica, tradicionalmente reservada a una élite intelectual en sus trabajos de investigación y desarrollo, se transformara en una herramienta de trabajo cotidiano al alcance de cualquiera, Taguchi puso a punto a principios de los años 60 un conjunto de tablas y gráficos, pensados para simplificar la tarea de diseñar experimentos altamente fraccionados sin necesidad de conocer los fundamentos teóricos de los mismos.

Taguchi propone la utilización generalizada de ciertos diseños básicos, que no son más que planes factoriales altamente fraccionados. A estos diseños, a los que da el nombre genérico de **"orthogonal arrays"** porque en ellos (como en toda fracción factorial) los efectos simples de los factores son ortogonales, les denomina con las siglas **Lx**, en las que **x** es un número que indica el número de pruebas del diseño.

En las páginas siguientes se recogen los orthogonal arrays L8 y L16 de Taguchi, correspondientes a diseños con 8 y 16 pruebas para factores a dos niveles. Dichos diseños, en el fondo, no son más que las fracciones factoriales 2^{7-4} y 2^{15-11}, fracciones completamente saturadas dado que los efectos simples de los factores "agotan" todos los grados de libertad de los diseños.

Taguchi utiliza los símbolos **1** y **2**, en vez de los tradicionales **-** y **+**, para referirse a los dos niveles de los factores, y ordena las columnas de forma que si las pruebas se realizan secuencialmente en el orden propuesto en la tabla, los factores que se asignan a las primeras columnas tengan que cambiarse de nivel pocas veces a lo largo del experimento.

L_8 (2^{7-4})

Permite estudiar hasta 7 factores en 8 pruebas

Prueba	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2	2
4	1	2	2	2	2	1	1
5	2	1	2	1	2	1	2
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1
8	2	2	1	2	1	1	2

Tabla de interacciones en el L_8

	2	3	4	5	6	7
(1)	3	2	5	4	7	6
	(2)	1	6	7	4	5
		(3)	7	6	5	4
			(4)	1	2	3
				(5)	3	2

(6) 1

L_{16} (2^{15-11})

Prueba	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2
3	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2
4	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1
5	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2
6	1	2	2	1	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1
7	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1
8	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	2	2
9	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
10	2	1	2	1	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1
11	2	1	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1
12	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1	1	2	1	2
13	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1
14	2	2	1	1	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2
15	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1	2
16	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2	1	2	2	1

Tabla de Interacciones del L_{16}

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
(1)	3	2	5	4	7	6	9	8	11	10	13	12	15	14
	(2)	1	6	7	4	5	10	11	8	9	14	15	12	13
		(3)	7	6	5	4	11	10	9	8	15	14	13	12
			(4)	1	2	3	12	13	14	15	8	9	10	11
				(5)	3	2	13	12	15	14	9	8	11	10
					(6)	1	14	15	12	13	10	11	8	9
						(7)	15	14	13	12	11	10	9	8
							(8)	1	2	3	4	5	6	7
								(9)	3	2	5	4	7	6
									(10)	1	6	7	4	5
										(11)	7	6	5	4
											(12)	1	2	3
												(13)	3	2
													(14)	1

Cuando el número de factores a ensayar es menor que el número de columnas del orthogonal array, el experimento puede organizarse de forma que los grados de libertad libres se utilicen para estudiar algunas interacciones dobles potencialmente interesantes, sin que resulten confundidas entre sí ni con los efectos simples. Basta para ello seleccionar las columnas a las que asignar los diferentes factores de forma que dichas interacciones resulten asociadas a columnas que queden libres en el diseño.

Para facilitar esta asignación Taguchi acompaña sus orthogonal arrays de tablas de interacciones que especifican con qué columna se confunde cada interacción doble. (Por ejemplo, la tabla de interacciones del L8 especifica que la interacción entre el factor que se asigne a la columna 3 y el que se asigne a la columna 5, se confundiría con el que factor que pudiera asignarse a la columna 6).

Autoevaluación: A partir del O.A. L8 y de su tabla de interacciones diseñar un experimento de 8 pruebas que permita estudiar los efectos simples de 4 factores A, B, C y D (todos ellos a 2 niveles) así como las interacciones dobles AB y AC, sin que ninguno de estos 6 efectos se confundan entre sí. (Ver respuesta en el Anejo al final del Tema)

Autoevaluación:)Es posible diseñar un experimento de 8 pruebas que permita estudiar 4 efectos simples A B C D y las interacciones dobles AB y CD? (Ver respuesta en el Anejo al final del Tema)

12.6 FRACCIONES FACTORIALES A TRES NIVELES

12.6.1 Interés

Aunque los diseños en los que todos los factores se estudian a dos niveles, son muy útiles en la práctica industrial, existen ocasiones en las que para uno o más de los factores investigados es aconsejable o imprescindible investigar más de dos o niveles o variantes.

<u>Factores cualitativos</u>: en el caso concreto de factores de tipo cualitativo (por ejemplo: Proveedor, Variedad, Tipo de Procesador,...) el número de variantes a estudiar viene definido por el número de alternativas existentes ()cuántos proveedores se desea comparar?) y será en algunos casos mayor que 2.

<u>Factores cuantitativos</u>: en este caso el número de niveles a ensayar (así como los valores concretos de los mismos) se pueden fijar libremente al diseñar el experimento. Aunque en la práctica industrial rara vez está justificado el estudiar 4 ó más niveles, sí que puede plantearse muchas veces la elección entre trabajar a dos o a tres niveles

Factores a dos niveles: Experimentos más sencillos que exigen menor número de pruebas. Efectos simples e interacciones fáciles de estudiar e interpretar. No es posible, sin embargo, determinar a partir de los resultados del experimento el nivel "óptimo" del factor (puesto que no puede detectarse la posible curvatura de la función de respuesta). A veces puede parecer que un factor no tiene efecto porque el nivel óptimo es intermedio entre los dos ensayados (esta situación es especialmente probable si se ensayan los niveles por encima y por debajo de la condición operativa habitual)

Factores a tres niveles: Experimentos más complicados y costosos que exigen mayor número de pruebas. Mayor dificultad en la interpretación de efectos simples e interacciones, pero mayor riqueza en las conclusiones. Mejor información resultante sobre la naturaleza del efecto del factor, que permite aproximar el valor "óptimo" del mismo.

En el contexto de los enfoques de diseño robusto de Taguchi, el estudio de la posible curvatura es especialmente importante, puesto que permite obtener regiones operativas en las que se transmite poca variabilidad. Por ello la utilización de diseños altamente fraccionados con factores a tres niveles, ha sido preconizada con carácter general por Taguchi, que propone la utilización al respecto de ciertos orthogonal arrays, especialmente de los tres (L_9, L_{18} y L_{27}) que se desarrollan a continuación

12.6.2 Orthogonal Arrays L9, L18 y L27

Orthogonal Array L_9

Este diseño, que en realidad se conocía desde hace mucho tiempo como el **cuadrado grecolatino 3x3**, permite estudiar 4 factores a 3 niveles en sólo 9 pruebas (en vez de las 81 que exigiría el diseño completo)

L_9 (4 factores a 3 niveles): 3^4

Prueba	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	2	2
3	1	3	3	3
4	2	1	2	3
5	2	2	3	1
6	2	3	1	2
7	3	1	3	2
8	3	2	1	3
9	3	3	2	1

Como puede comprobarse se trata de un diseño ortogonal. Cada factor se estudia 3 veces a nivel 1, tres a nivel 2 y tres a nivel 3. En las tres repeticiones en que un factor cualquiera se halla a un determinado nivel, los tres factores restantes están una vez a nivel 1, una a nivel 2 y una a nivel 3.

Dado que los efectos simples de 4 factores a tres niveles "ocupan" 4x2=8 grados de libertad, que son la totalidad de los disponibles en un diseño de 9 pruebas, el L_9 es un diseño completamente saturado, en el que las interacciones dobles se confunden con los efectos simples. A diferencia de lo que sucedía en las fracciones 2^{K-P}, donde cada interacción doble se confundía completamente con un determinado efecto simple, en el L_9 cada interacción doble se "reparte" entre los efectos simples de los otros dos factores.

Nota: Los autores de este libro han demostrado[1] que si se utilizan las columnas 2, 3 y 4 del L_9, es posible obtener un diseño para tres factores cuantitativos a 3 niveles en 9 pruebas en el que las componentes lineales de los efectos simples no estén confundidos con las componentes cuadráticas de dichos efectos, ni con las componentes LinealxLineal de las interacciones dobles. A este tipo de diseños, en el que los efectos de primer orden (componente lineal de los efectos simples) no están confundidos con los de segundo orden (componentes cuadráticas de los efectos simples y componentes LinealxLineal de las interacciones dobles) les denominan los autores diseños de Resolución IV Generalizada.

Dado que en el L_9 no quedan grados de libertad residuales, su análisis mediante un Anova exige agrupar en el residuo aquellos efectos cuyos Cuadrados Medios resulten pequeños y del mismo orden. Es aconsejable al respecto el descomponerlos previamente en sus componentes lineal y cuadrática cuando se refieran a factores cuantitativos.

Orthogonal Array L_{18}

L_{18} $(2^1 * 3^7)$

Prueba	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	2	2	2	2	2	2
3	1	1	3	3	3	3	3	3
4	1	2	1	1	2	2	3	3
5	1	2	2	2	3	3	1	1
6	1	2	3	3	1	1	2	2
7	1	3	1	2	1	3	2	3
8	1	3	2	3	2	1	3	1
9	1	3	3	1	3	2	1	2
10	2	1	1	3	3	2	2	1
11	2	1	2	1	1	3	3	2
12	2	1	3	2	2	1	1	3
13	2	2	1	2	3	1	3	2
14	2	2	2	3	1	2	1	3
15	2	2	3	1	2	3	2	1

[1] ROMERO R. y ZUNICA L.R: : "Diseños de Resolución IV derivados de Orthogonal Arrays a tres niveles". Congreso de la S.E.I.O 1990

16	2	3	1	3	2	3	1	2
17	2	3	2	1	3	1	2	3
18	2	3	3	2	1	2	3	1

Este diseño, debido a Burmann (1946), permite estudiar un factor a 2 niveles y hasta 7 factores adicionales a 3 niveles, realizando sólo 18 pruebas, en vez de las 4.374 que exigiría el plan completo equilibrado.

Autoevaluación: Si sólo se consideran los efectos simples,)el O.A L_{18} deja algún grado de libertad residual?
Comprobar que el diseño L_{18}, cuya tabla se recoge a continuación, es un diseño en el que los efectos simples son ortogonales entre sí.
)Es ortogonal la interacción 1x2 al efecto simple de 3?)Es ortogonal la interacción 1x3 al efecto simple de 4?

En el L_{18} los efectos simples ocupan 1+7x2 = 15 g.l. dejando por tanto dos grados de libertad libres de los 17 (18-1) del diseño. Estos 2 g.l están asociados a la interacción 1x2, de forma que ésta no se halla confundida con efectos simples. Las restantes interacciones dobles se hallan repartidas, como sucedía en el L_9, entre diversos efectos simples.

Nota: Los autores, en el trabajo anteriormente referenciado, han estudiado la posibilidad de obtener diseños de Resolución IV Generalizada a partir del L_{18}.

Orthogonal Array L_{27}

Este diseño permite estudiar el efecto de hasta 13 factores a 3 niveles realizando sólo 27 pruebas, en vez de las (1.594.323! que exigiría un diseño equilibrado completo.

Se trata de un diseño completamente saturado puesto que los efectos simples "ocupan" 13x2 = 26 grados de libertad, que son la totalidad de los existentes en un diseño de 27 pruebas.

A diferencia de lo que sucedía en el L_{18}, el L_{27} presenta la ventaja de que las interacciones dobles, cada una de ellas con (3-1)(3-1) = 4 g.l., se asocian a columnas concretas del orthogonal array (cada interacción a dos columnas, dado que cada una de éstas por corresponder a factores a tres niveles lleva asociados 2 g.l.).

Ello permite, en el caso de que no se precise utilizar todas las columnas del O.A. por estudiarse menos de 13 factores, organizar el experimento de forma que puedan estudiarse ciertas interacciones dobles potencialmente interesantes.

Como puede observarse en la tabla de interacciones se asignan dos columnas del diseño a cada interacción. Por ejemplo, la interacción entre los factores asignados a las columnas 4 y 5 se confundiría con los efectos simples de los factores que pudieran asignarse a las columnas 10 y 12.

Orthogonal Array L_{27} (3^{13})

Prueba	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	1	1	1	1	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	1	2	2	2	1	1	1	2	2	2	3	3	3
5	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	1	1	1
6	1	2	2	2	3	3	3	1	1	1	2	2	2
7	1	3	3	3	1	1	1	3	3	3	2	2	2
8	1	3	3	3	2	2	2	1	1	1	3	3	3
9	1	3	3	3	3	3	3	2	2	2	1	1	1
10	2	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
11	2	1	2	3	2	3	1	2	3	1	2	3	1
12	2	1	2	3	3	1	2	3	1	2	3	1	2
13	2	2	3	1	1	2	3	2	3	1	3	1	2
14	2	2	3	1	2	3	1	3	1	2	1	2	3
15	2	2	3	1	3	1	2	1	2	3	2	3	1
16	2	3	1	2	1	2	3	3	1	2	2	3	1
17	2	3	1	2	2	3	1	1	2	3	3	1	2
18	2	3	1	2	3	1	2	2	3	1	1	2	3
19	3	1	3	2	1	3	2	1	3	2	1	3	2
20	3	1	3	2	2	1	3	2	1	3	2	1	3
21	3	1	3	2	3	2	1	3	2	1	3	2	1
22	3	2	1	3	1	3	2	2	1	3	3	2	1
23	3	2	1	3	2	1	3	3	2	1	1	3	2
24	3	2	1	3	3	2	1	1	3	2	2	1	3
25	3	3	2	1	1	3	2	3	2	1	2	1	3
26	3	3	2	1	2	1	3	1	3	2	3	2	1
27	3	3	2	1	3	2	1	2	1	3	1	3	2

Autoevaluación: Se desea diseñar un experimento para estudiar el efecto de 7 factores A B C D E F y G a 3 niveles. Dado que los factores A B y C son potencialmente muy importantes se sospecha que puedan existir interacciones dobles entre los mismos.
)Cuántos grados de libertad exigiría como mínimo un diseño en el que puedan estudiarse ortogonalmente los 7 efectos simples y las 3 interacciones dobles.
Con la ayuda de la tabla de interacciones construir a partir del L_{27} un diseño que satisfaga los requisitos exigidos.
(Ver respuesta en el Anejo al final del Tema)

Tabla de Interacciones del L_{27}

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
(1)	3	2	2	6	5	5	9	8	8	12	11	11
	4	4	3	7	7	6	10	10	9	13	13	12
	(2)	1	1	8	9	10	5	6	7	5	6	7
		4	3	11	12	13	11	12	13	8	9	10
		(3)	1	9	10	8	7	5	6	6	7	5
			2	13	11	12	12	13	11	10	8	9
			(4)	10	8	9	6	7	5	7	5	6
				12	13	11	13	11	12	9	10	8
				(5)	1	1	2	3	4	2	4	8
					7	6	11	13	12	8	10	9
					(6)	1	4	2	3	8	2	4
						5	13	12	11	10	9	8
						(7)	3	4	2	4	3	2
							12	11	13	9	8	10
							(8)	1	1	2	3	4
								10	9	5	7	6
								(9)	1	4	2	3
									8	7	6	5
									(10)	3	4	2
										6	7	7
										(11)	1	1
											13	12
											(12)	1
												11

12.6.3 Adaptación de Orthogonal Arrays

Frecuentemente no se encuentra ningún orthogonal array estándar que se adapte exactamente a las exigencias de un diseño concreto. Por ejemplo ninguno de los O.A. estudiados permite diseñar un experimento para estudiar dos factores a 2 niveles y dos más a 3 niveles.

Taguchi propone utilizar en estas situaciones ciertos "trucos" que, manteniendo la propiedad esencial de la ortogonalidad de los diseños, permiten adaptarlos a las exigencias deseadas. Posiblemente los tres trucos más útiles son los siguientes:

1. En una columna de un factor a 3 niveles es posible acomodar un factor a 2 niveles haciendo equivalentes 2 de los 3 niveles primitivos.

2. En cualquier diseño con factores a 2 niveles es posible acomodar un factor a 4 niveles usando 2 columnas cualesquiera y la correspondiente a su interacción.

3. En un diseño con Factores a 2 niveles es posible acomodar un Factor a 3 niveles usando el truco 2 y luego haciendo equivalentes 2 de los 4 nuevos niveles.

Autoevaluación: Utilizando el truco 1 construir a partir del L_9 un diseño que permita analizar en 9 pruebas los efectos de dos factores a 2 niveles y de otros dos a 3 niveles. Comprobar que en el diseño resultante todos los efectos simples son ortogonales entre sí.

Autoevaluación: Utilizar el truco 2, combinado con el 1, para construir a partir del L_{18} un diseño que permita estudiar el efecto de un factor a 4 niveles y de tres factores adicionales a 3 niveles. Comprobar la ortogonalidad del diseño obtenido.
(Ver respuesta en el Anejo al final del Tema)

12.6.4 Ejemplo de un L18

En la elaboración de un determinado pigmento utilizado para la fabricación de colorantes, la fase de molido del mismo, hasta conseguir un tamaño de partícula de unas pocas micras, es el cuello de botella de todo el proceso, teniendo por tanto gran interés minimizar el tiempo necesario para conseguirlo. Con dicho objetivo se llevó a cabo en una empresa el siguiente experimento:

Factores estudiados: tres a 2 niveles y cinco a 3 niveles (Por motivos de confidencialidad los denominaremos A, B, C, D, E, F, G y H)

Diseño utilizado: un L_{18} readaptando las columnas 30 y 50 para acomodar e ellas factores a 2 niveles

Los resultados del experimento se recogen en la tabla de la página siguiente.

Autoevaluación: Un técnico opinó que no era necesario ningún análisis estadístico de los resultados, porque estaba claro que la mejor condición operativa era $A_2B_2C_2D_3E_1F_2G_1H_3$, que es la que se ensayó en la prueba 14, que fue la que tuvo un menor valor para el tiempo de molido.
¿Qué piensas de esa opinión? ¿Cuántas condiciones operativas distintas podrían haberse probado? ¿Cuántas se han ensayado realmente? ¿Crees que es muy probable que se haya ensayado la óptima? ¿Crees que es posible encontrar a partir de los resultados del experimento una solución que sea mejor que cualquiera de las realmente ensayadas? ¿Cómo? ¿Realmente es necesario trabajar con H a nivel 3, que es el nivel más caro para ese factor?

Resultados del Experimento

Factor / Prueba	A	B	C	D	E	F	G	H	Tiempo Molido
1	1	1	1	1	1	1	1	1	852
2	1	1	2	2	2	2	2	2	540
3	1	1	2	3	2	3	3	3	417
4	1	2	1	1	2	2	3	3	1282
5	1	2	2	2	2	3	1	1	505
6	1	2	2	3	1	1	2	2	445
7	1	3	1	2	1	3	2	3	852
8	1	3	2	3	2	1	3	1	482
9	1	3	2	1	2	2	1	2	707
10	2	1	1	3	2	2	2	1	492
11	2	1	2	1	1	3	3	2	975
12	2	1	2	2	2	1	1	3	450
13	2	2	1	2	2	1	3	2	722
14	2	2	2	3	1	2	1	3	402
15	2	2	2	1	2	3	2	1	732
16	2	3	1	3	2	3	1	2	482
17	2	3	2	1	2	1	2	3	855
18	2	3	2	2	1	2	3	1	515

El Anova de los resultados anteriores, considerando sólo los efectos simples al estar las interacciones dobles confundidas con ellos, da lugar al siguiente cuadro resumen:

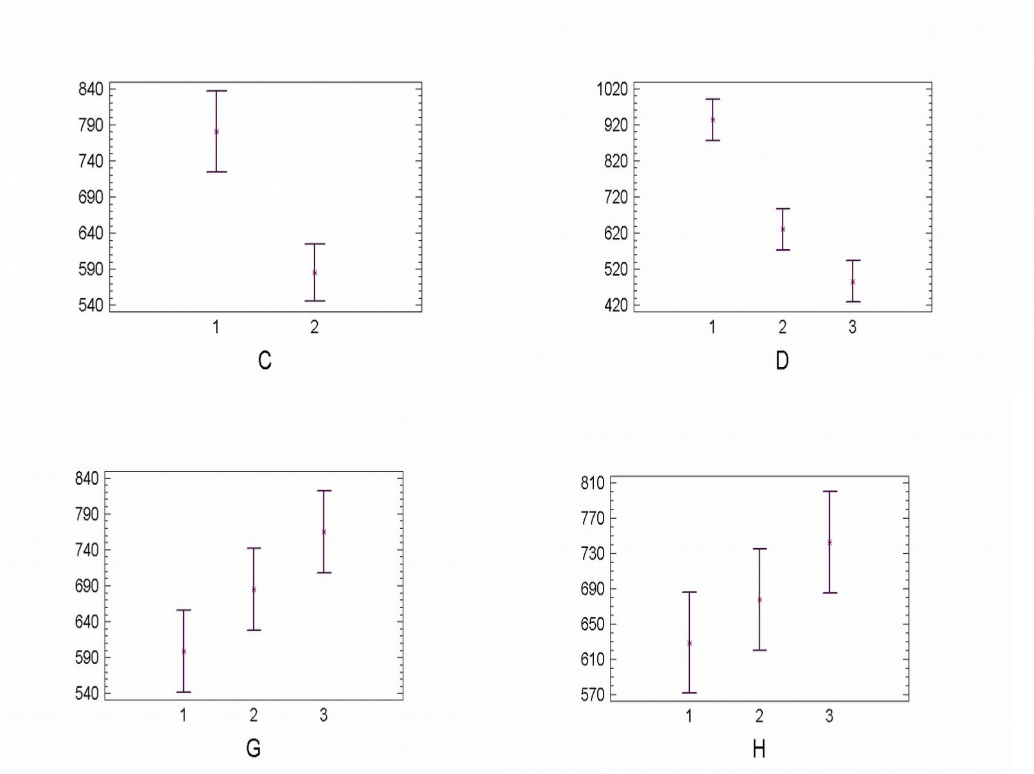
```
Analysis of Variance for TIEMPOMOl
--------------------------------------------------------------------------------
Source                  Sum of Squares     Df    Mean Square     F-Ratio     P-Value
--------------------------------------------------------------------------------
MAIN EFFECTS
 A:A                           11602.7      1        11602.7        1.00      0.3729
 B:B                           10942.1      2        5471.06        0.47      0.6536
 C:C                          151970.0      1       151970.0       13.16      0.0222
 D:D                          625208.0      2       312604.0       27.07      0.0047
 E:E                           4807.11      1        4807.11        0.42      0.5539
 F:F                           2372.11      2        1186.06        0.10      0.9047
 G:G                           82548.8      2        41274.4        3.57      0.1287
 H:H                           38778.8      2        19389.4        1.68      0.2955

RESIDUAL                       46186.5      4        11546.6
--------------------------------------------------------------------------------
TOTAL (CORRECTED)             974416.0     17
--------------------------------------------------------------------------------
```

Con el fin de incrementar los grados de libertad residuales, se rehace el análisis dejando únicamente como factores potencialmente significativos C, D, G y H

Source	Sum of Squares	Df	Mean Square	F-Ratio	P-Value
MAIN EFFECTS					
A:C	151970.0	1	151970.0	20.02	0.0012
B:D	625208.0	2	312604.0	41.18	0.0000
C:G	82548.8	2	41274.4	5.44	0.0252
D:H	38778.8	2	19389.4	2.55	0.1270
RESIDUAL	75910.6	10	7591.06		
TOTAL (CORRECTED)	974416.0	17			

Se aprecia que los efectos de C, D y G son claramente significativos, mientras que el de H es dudoso (*p-value* 0.127). Como veremos, sin embargo, la componente lineal de este último efecto también resulta significativa.

Los gráficos de intervalos LSD para las medias de estos 4 factores, permiten visualizar la naturaleza de dichos efectos.



Se aprecia que el tiempo medio de molido disminuye al aumentar los niveles de C y D, y aumenta al incrementarse los niveles de G y H. Los efectos de G y H son claramente lineales, tal como se refleja en las figuras anteriores.

Autoevaluación: a partir de la tabla de valores medios que se recoge a continuación, calcular la componente lineal del efecto de H y constatar que resulta significativa estadísticamente

La tabla de valores medios para los distintos niveles de los diferentes factores, puede obtenerse como una salida opcional al realizar el Anova con Statgraphics, y se refleja a continuación.

Level	Count	Mean	Stnd. Error	Lower Limit	Upper Limit
GRAND MEAN	18	682.875			
C					
1	6	780.333	35.5693	701.08	859.587
2	12	585.417	25.1513	529.376	641.457
D					
1	6	932.986	36.3028	852.098	1013.87
2	6	629.819	36.3028	548.932	710.707
3	6	485.819	36.3028	404.932	566.707
G					
1	6	598.819	36.3028	517.932	679.707
2	6	685.153	36.3028	604.265	766.041
3	6	764.653	36.3028	683.765	845.541
H					
1	6	628.819	36.3028	547.932	709.707
2	6	677.653	36.3028	596.765	758.541
3	6	742.153	36.3028	661.265	823.041

La condición operativa óptima se obtiene simplemente seleccionando los mejores niveles de los factores con efectos significativos, resultando ser C2 D3 G1 H1. (Nota: los restantes factores, por no ser significativos sus efectos sobre el tiempo de molido, se situarán a sus niveles más baratos o cómodos)

La media prevista en estas condiciones puede obtenerse de la forma habitual, a partir de los valores recogidos en la tabla de valores medios.

Media general	682.9
Efecto de C2 (585.4-682.9)	-97.5
Efecto de D3 (485.8-682.9)	-197.1
Efecto de G1 (598.8-682.9)	-84.1
Efecto de H1 (628.8-682.9)	-54.1
MEDIA PREVISTA	250.1

El tiempo de molido medio previsto en las nuevas condiciones encontradas para el proceso, resultó ¡menos de la mitad! del que exigía el proceso usado hasta la fecha, lo que permitió incrementar notablemente la capacidad de producción, por ser la operación de molido el "cuello de botella" del proceso de fabricación de pigmentos.

Estimación de la Precisión de la Predicción (de acuerdo con la expresión vista al final del apartado 11.3.5)

$$s_{pred} = \sqrt{\frac{CM_{resid}}{N}(1+gl)} = \sqrt{\frac{7591}{18}(1+7)} = 58.1$$

(puesto que los grados de libertad de los efectos que intervienen en la predicción son 1 + 2 + 2 + 2 = 7)

Intervalo de confianza para la media prevista:

$$\text{media} \pm t_{10}^{0.05} s_{pred} = 250.1 \pm 2.228 \times 58.1 = [120.7 \quad 379.5]$$

Autoevaluación:)Se había realizado alguna prueba en el experimento a los niveles $C_2D_3G_1H_1$? ¿Era realmente necesario trabajar con H a nivel 3, pese a ser el más caro, porque la mejor prueba de las ensayadas tiene H a nivel 3?

12.7 TRABAJOS DE LABORATORIO

12.7.1 Ejercicios

1- Realizar la autoevaluación propuesta al final del apartado 12.3.3

2- Reanalizar los ejemplos desarrollados en los apartados 12.4.3 y 12.6.4

3- Se desea construir un diseño de experimentos para analizar 5 factores (F1, F2, F3, F4 y F5) a dos niveles realizando sólo 8 pruebas. Se piensa que el factor F3 es muy improbable que interaccione con ninguno de los 4 restantes. Usando la tabla del apartado 12.4.1 construir el diseño a utilizar y, tras analizar cómo se confunden los efectos simples con las interacciones dobles, señalar a qué letra (A, B, C, D o E) debería asignarse el factor F3 con el fin de que la mayor cantidad posible de efectos simples no se confundan con interacciones dobles

12.7.3 Evaluación

Con el fin de intentar mejorar el rendimiento de un proceso de fabricación industrial se realizó un experimento con 7 factores (a los que denominaremos A, B, C, D, E, F, y G), todos ellos a dos niveles, uno bajo (-) y otro alto (+). El diseño utilizado y el rendimiento obtenido en cada prueba (Tms/hora) se recogen en la tabla adjunta

A	B	C	D	E	F	G	Rto
-	-	-	+	+	+	-	17
+	-	-	-	-	+	+	27
-	+	-	-	+	-	+	15
+	+	-	+	-	-	-	24
-	-	+	+	-	-	+	20
+	-	+	-	+	-	-	18
-	+	+	-	-	+	-	21
+	+	+	+	+	+	+	19

a) Indicar cuál ha sido el diseño utilizado y comprobar que dos factores cualesquiera, por ejemplo el B y el E, son ortogonales entre sí.)Con qué efecto simple está confundida en este diseño la interacción BE?

b) Asumiendo que todas las interacciones son poco importantes analizar los resultados del experimento calculando los 7 efectos simples y representándolos mediante un Gráfico de Daniel.)Qué factores parecen tener un efecto significativo?

c))Cuáles serían en consecuencia las condiciones operativas óptimas del proceso?

d))Qué rendimiento promedio cabe esperar operando en estas condiciones? Obtener un intervalo de confianza (α=0.05) para dicho rendimiento medio previsto.

12.A AUTOEVALUACIONES RESUELTAS Y EJERCICIOS

12.A.1 Respuesta a algunas Autoevaluaciones

Autoevaluación: A partir del O.A. L8 y de su tabla de interacciones diseñar un experimento de 8 pruebas que permita estudiar los efectos simples de 4 factores A, B, C y D (todos ellos a 2 niveles) así como las interacciones dobles AB y AC, sin que ninguno de estos 6 efectos se confundan entre sí.

En primer lugar hay que comprobar que el número de grados de libertad de los efectos que desean estudiarse es ≤ que 7, que son los grados de libertad totales en un diseño de 8 pruebas. Que se verifique esto es una condición necesaria, pero no suficiente, para que se pueda construir el diseño pedido.

En este caso el número de efectos que se desea estudiar (todos ellos con 1 g.l.) es 6 que es menor que 7

Se podrían asignar:

A a la columna 1
B a la columna 2
(la interacción AB se "sitúa" en la columna 3, por lo que no se asigna ningún factor a esta columna)
C a la columna 4
(la interacción AC se "sitúa" en la columna 5, por lo que no se asigna ningún factor a esta columna)
D se puede asignar a una cualquiera de las dos columnas que quedan libres, por ejemplo a la 7

El diseño final resultante será, por tanto:

A	B	C	D
1	1	1	1
1	1	2	2
1	2	1	2
1	2	2	1
2	1	1	2

2	1	2	1
2	2	1	1
2	2	2	2

Autoevaluación:)Es posible diseñar un experimento de 8 pruebas que permita estudiar 4 efectos simples A B C D y las interacciones dobles AB y CD?

Probando diferentes alternativas en el L8, se comprueba que no existe ninguna solución posible para el diseño buscado

Autoevaluación: Se desea diseñar un experimento para estudiar el efecto de 7 factores A B C D E F y G a 3 niveles. Dado que los factores A B y C son potencialmente muy importantes se sospecha que puedan existir interacciones dobles entre los mismos.
)Cuántos grados de libertad exigiría como mínimo un diseño en el que puedan estudiarse ortogonalmente los 7 efectos simples y las 3 interacciones dobles.
Con la ayuda de la tabla de interacciones construir a partir del L_{27} un diseño que satisfaga los requisitos exigidos.

Los grados de libertad necesarios son: 7x2 (para los 7 efectos simples) + 3x4 (para las 3 interacciones dobles) = 26. Como el L27 tiene 26 grados de libertad, quizás sea posible construir el diseño pedido.

Posible asignación de factores a columnas:

A en 1
B en 2
(en consecuencia AxB "ocupa" las columnas 3 y 4)
C en 5
(en consecuencia AxC "ocupa" las columnas 6 y 7 y BxC "ocupa" las columnas 8 y 11)
D, E, F, y G pueden asignarse a las 4 columnas del L27 que quedan libres que son la 9, 10, 12 y 13

Autoevaluación: Utilizar el truco 2, combinado con el 1, para construir a partir del L_{18} un diseño que permita estudiar el efecto de un factor a 4 niveles y de tres factores adicionales a 3 niveles. Comprobar la ortogonalidad del diseño obtenido.

Se pueden utilizar las columnas (1) y (2) y los 2 grados de libertad correspondientes a la interacción (1)x(2) (que en este diseño L18 están "libres" y no ocupan ninguna columna), para poner un factor a 6 niveles. Cada nivel se asigna a una de las 6 combinaciones: (1 1), (1 2), (1 3), (2 1), (2 2) y (2 3), presentes en las dos primeras columnas, resultando:

Prueba	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Nivel	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4	5	5	5	6	6	6

Luego se hacen equivalente, por ejemplo, los niveles 3 y 4 a un nuevo nivel 3, y los niveles 5 y 6 al nuevo nivel 4, resultando los niveles del nuevo factor en cada una de las 18 pruebas los siguientes:

Prueba	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Nivel	1	1	1	2	2	2	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4

Los otros 3 factores pueden asignarse a cualquiera de las 6 columnas del L18 no utilizadas (de la 3ª a la 8ª)

La ortogonalidad del nuevo factor creado de 4 niveles y cualquier otra columna del L18, se comprueba inmediatamente constatando que en las pruebas en que el nuevo factor está a uno cualquiera de sus 4 niveles posibles, cualquier otro factor está 1/3 de las veces a nivel 1, 1/3 de las veces a nivel 2 y 1/3 de las veces a nivel3.

12.A.2 Ejercicios adicionales

Sea la siguiente Fracción Factorial utilizada para el análisis de 6 factores (A, B, C, D, E y F):

Prueba	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
1	-	-	-	+	+	+
2	+	-	-	+	-	-
3	-	+	-	-	-	+
4	+	+	-	-	+	-
5	-	-	+	-	+	-
6	+	-	+	-	-	+
7	-	+	+	+	-	-
8	+	+	+	+	+	+

Obtener los generadores del diseño e indicar todos los efectos (simples e interacciones de cualquier orden) con los que se encuentra confundida la interacción doble BC.

Se desea diseñar un experimento para estudiar los efectos de los siguientes factores:

Dosis de abonado nitrogenado (con dos niveles N1 y N2)
Dosis de abonado fosfórico (con dos niveles P1 y P2)
Dosis de riego (con dos niveles R1 y R2)
Frecuencia de riego (con dos niveles F1 y F2)
Variedad (Factor cualitativo con 4 variantes V1, V2, V3 y V4)
Época de siembra (Con 3 variantes E1, E2 y E3)

Se considera que puede haber interacciones dobles importantes entre los factores 1 y 2 y entre los factores 3 y 4.
Diseñar un experimento de 16 pruebas en el que sean ortogonales los 6 efectos simples y las dos interacciones dobles consideradas, escribiendo la tabla con los tratamientos a ensayar en cada una de dichas pruebas.